کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضي

گروه آموزشی : **ریاضي**	امتحان درس : **ریاضي۲-فني (۴ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۱**-۱۳۹۰ نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۰/۱۰/۲۵** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاري امتحان به هیچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+\ln z$ را بیابید به شرط آنکه : **۱۵ نمره**

$$x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\ \ ,\ \ x^2+y^2+z^2=9$$

سوال۲- انتگرال سه گانه $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\dfrac{dxdydz}{1+x^2+y^2+z^2}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

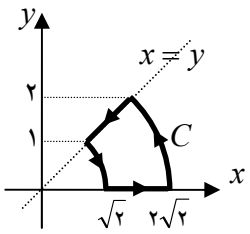
سوال۳- حجم ناحیه محصور به رویه‌های $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ و $6z=x^2+y^2$ را بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از رویه $z=10-2x^2-2y^2$ را بیابید که توسط استوانه $x^2+y^2=5$ جدا می شود. **۲۰ نمره**

سوال۵- اگر مسیر C مربعی با طول ضلع برابر ۲ در صفحه xy باشد که مرکز آن بر مبدا مختصات واقع است، مطلوب است مقدار : **۱۵ نمره**

$$I=\oint\limits_C\ (z^3+2xy)dx+x^2dy+3xz^2dz$$

سوال۶- اگر $\vec{F}=(\ \arctan\dfrac{y}{x},\ln(x^2+y^2)\ )$ و C مرز نشان داده شده در شکل مقابل باشد ، مقدار انتگرال $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**



سوال۷- اگر $\vec{F}=(\ y,-x,z\ )$ یک تابع برداری و S سطح خارجی نیمکره $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ ,\ z\ge 0$ باشد ، درستی قضیه استوکس را بررسی کنید. **۲۰ نمره**

(یعنی نشان دهید $\iint\limits_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که C مرز رویه S است.)

موفق باشید

جواب سوال۱ – روش اول : داریم $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ بنابر این $f=\ln x+\ln y+\ln\sqrt{9-x^2-y^2}$

و در نقاط اکسترمم باید داشته باشیم $f_x=0, f_y=0$ پس $\frac{1}{y}-\frac{y}{9-x^2-y^2}=0$, $\frac{1}{x}-\frac{x}{9-x^2-y^2}=0$ یعنی

$9-x^2-y^2=x^2=y^2\to x=y$. اما اکنون داریم $\frac{1}{x}-\frac{x}{9-x^2-x^2}=0 \to 9-2x^2=x^2$

$$\to x=\sqrt{3}\to y=\sqrt{3}\ ,\ z=\sqrt{3}\ \to \max f=f(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})=3\ln\sqrt{3}=(3\ln 3)/2$$

روش دوم : (ضرایب لاگرانژ) تعریف می کنیم : $g(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$

و باید داشته باشیم : $f_x=0\ ,\ f_y=0\ ,\ f_z=0\ ,\ f_\lambda=0$ بنابر این

$$\frac{1}{x}-2\lambda x=0\ ,\ \frac{1}{y}-2\lambda y=0\ ,\ \frac{1}{z}-2\lambda z=0\ ,\ -(x^2+y^2+z^2-9)=0$$

یعنی $x^2=y^2=z^2=\frac{1}{2\lambda}$ و از معادله چهارم داریم $x^2+y^2+z^2=3x^2=9$ یعنی $x=y=z=\sqrt{3}$ و . . .

جواb سوال ۲- به کمک تغییر متغیر به مختصات کروی داریم :

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2}=\int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{1+\rho^2}d\theta\,d\varphi\,d\rho=2\pi\int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{1+\rho^2}d\varphi\,d\rho$$

$$=4\pi\int_{\rho=0}^{1}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}d\rho=4\pi\int_{\rho=0}^{1}(1-\frac{1}{1+\rho^2})\,d\rho=4\pi[\rho-\arctan\rho]_0^1=4\pi(1-\frac{\pi}{4})=\pi(4-\pi)$$

جواb سوال ۳ – اشتراک دو رویه یک دایره است. $x^2+y^2=12\ ,\ z=2$ و تصویر ناحیه مورد نظر بر روی صفحه xy دایره $x^2+y^2=12$ است که آن را D می نامیم. به کمک مختصات استوانه ای حجم آن برابر است با :

$$\int_{r=0}^{2\sqrt{3}}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\sqrt{16-r^2}-\frac{r^2}{6})\,r\,d\theta\,dr=2\pi\int_{r=0}^{2\sqrt{3}}(r\sqrt{16-r^2}-\frac{r^3}{6})\,dr=2\pi[\frac{-1}{3}\sqrt{(16-r^2)^3}-\frac{r^4}{24}]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$=2\pi[\frac{-8}{3}-6+\frac{64}{3}]=\frac{76\,\pi}{3}$$

جواب سوال ۴ - قسمتی از سهمیگون را که درون استوانه قرار دارد S می نامیم.

تصویر S بر روی صفحه xy دایره $x^2+y^2=5$ است که آن را D می نامیم. بردار یکه قائم بر سهمیگون برابر است با

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{16x^2+16y^2+1}}(4x,4y,1)$ و در نتیجه $dS=\sqrt{16x^2+16y^2+1}\,dx\,dy$ و $S=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{16x^2+16y^2+1}\,dx\,dy$

به کمک مختصات استوانه ای داریم :

$$S=\int_{r=0}^{\sqrt{5}}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\sqrt{1+16r^2})\,r\,d\theta\,dr=2\pi\int_{r=0}^{\sqrt{5}}(r\sqrt{1+16r^2})\,dr=2\pi[\frac{1}{48}\sqrt{(1+16r^2)^3}]_0^{\sqrt{5}}=2\pi[\frac{729}{48}-\frac{1}{48}]=\frac{91\,\pi}{3}$$

جواb سوال ۵ - روش اول : چون مسیر C در صفحه xy واقع است پس $z=0$ و $I=\oint_C 2xydx+x^2dy$.

شرایط قضیه گرین برقرار است. ناحیه محدود به مسیر C را D می نامیم و در نتیجه : $I=\iint_D(2x-2x)dxdy=0$

روش دوم : شرایط قضیه استوکس برقرار است بنابر این

$$I=\oint_C(z^3+2xy)dx+x^2dy+3xz^2dz=\iint_D(0-0)dydz+(3z^2-3z^2)dxdz+(2x-2x)dxdy=0$$

جواb سوال ۶ - روش اول :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \arctan\frac{y}{x}dx + \ln(x^2+y^2)dy$$

مسیر C شامل چهار قسمت است. مسیر C_1 که بر خط $y=x$ واقع است. بر روی این مسیر $y=x\ ,\ dy=dx$ بنابر این

$$\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x=2}^{1}(\frac{\pi}{4}+\ln 2+2\ln x)dx = -\frac{\pi}{4}-\ln 2+2x(\ln x-1)\Big|_2^1 = -\frac{\pi}{4}-\ln 2-2-4(\ln 2-1) = -\frac{\pi}{4}+2-5\ln 2$$

مسیر C_2 که بر محور xها واقع است. بر روی این مسیر $y=0\ ,\ dy=0$ بنابر این $\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

۲ قسمت دیگر مسیر، بر دایره هایی به مرکز مبدا واقع هستند. نشان می دهیم این انتگرال روی هر مسیر دایره ای مشابه با ۲ مسیر داده شده برابر صفر است. اگر C' قسمتی از دایره $x^2+y^2=a^2$ با شرط $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ باشد که در جهت عکس عقربه های ساعت طی شود، می توانیم بنویسیم :

$$x=a\cos\theta\ ,\ y=a\sin\theta\ ,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

$$\oint_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C'}\arctan\frac{y}{x}dx+\ln(x^2+y^2)dy = \int_{\theta=0}^{\pi/4}[\arctan\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta}(-a\sin\theta)+\ln(a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)(a\cos\theta)]d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi/4}[(-a\theta\sin\theta)+(2a\ln a)\cos\theta]d\theta = a[\theta\cos\theta-\sin\theta+(2\ln a)\sin\theta]_0^{\pi/4} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{4}-1+2\ln a)$$

اکنون با فرض $a=\sqrt{2}$ و $a=2\sqrt{2}$ مقدار انتگرال روی دو مسیر دایره ای به ترتیب برابر $-\frac{\pi}{4}+1-\ln 2$ و $\frac{\pi}{2}-2+6\ln 2$ بدست می آید. بنابر این :

$$\oint_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r} = (-\frac{\pi}{4}+2-5\ln 2)+0+(-\frac{\pi}{4}+1-\ln 2)+(\frac{\pi}{2}-2+6\ln 2)=1$$

روش دوم : تابع $\ln(x^2+y^2)$ و مشتقات نسبی آن از هر مرتبه ای بر روی مسیر C و در ناحیه محدود به آن - که آن را D می نامیم - موجود هستند. مشتقات نسبی تابع $\arctan\frac{y}{x}$ نیز از هر مرتبه ای بر روی مسیر C و در ناحیه موجودند بنابر این می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C\arctan\frac{y}{x}dx+\ln(x^2+y^2)dy = \iint_D(\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2})dx\,dy = \iint_D\frac{x}{x^2+y^2}dx\,dy$$

به کمک مختصات قطبی داریم :

$$\iint_D\frac{x}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{r\cos\theta}{r^2}r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\cos\theta\ dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\cos\theta\ d\theta = \sqrt{2}\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/4}=1$$

جواb سوال ۷ - داریم $curl\vec{F}=(0-0,0-0,-1-1)=(0,0,-2)$ و $\nabla f=(2x,2y,2z)$ یعنی $\vec{n}=\frac{1}{a}(x,y,z)$ بردار یکه قائم بر سطح خارجی نیمکره است و همچنین داریم $dS=\frac{a}{z}dxdy$ بنابر این اگر D قرص دایره ای $x^2+y^2\le a^2, z=0$ باشد آنگاه :

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D(0,0,-2)\cdot(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})\frac{a}{z}dxdy = -2\iint_D dxdy = -2\times\pi a^2 = -2\pi a^2$$

از طرف دیگر اگر منحنی C دایره $x^2+y^2=a^2, z=0$ (یعنی مرز یا لبه سطح D) باشد آنگاه به کمک قضیه گرین داریم :

$$\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C ydx-xdy+zdz = \oint_C ydx-xdy = \iint_D -2\,dxdy = -2\times\pi a^2 = -2\pi a^2$$

و یا با فرض $x=a\cos t, y=a\sin t$ داریم : $\oint_C ydx-xdy = \int_{t=0}^{2\pi}(-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t)dt = \int_{t=0}^{2\pi}-a^2dt = -2\pi a^2$